DIRECTION DE LA METEOROLOGIE NATIONALE
ECOLE NATIONALE DE LA METEOROLOGIE

CONCOURS EXTERNE 1992
D'ELEVE-INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

---

# EPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION :

# MATHEMATIQUES (II)

Durée : 4 heures Coefficient : 6

---

*En dépit de quelques similitudes, les deux problèmes peuvent être traités indépendamment. La clarté de la présentation intervient dans la notation.*

---

## - PROBLEME I -

1°) On pose $J_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \, dx$ où $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de $J_n$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. Donner une relation de récurrence entre $J_n$ et $J_{n-1}$. En déduire l'expression de $J_n$ sous forme d'une somme.

2°) On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n!}$. Etudier sa convergence.

3°) Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer, en fonction de $\varepsilon$, une condition sur $n_0$ pour que $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n < \varepsilon$

4°) Soit $\varphi$ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
On pose $m_n = \text{Inf}\,(\varphi([n+1, +\infty[))$.

Etudier la suite $m_n$. En déduire:

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \quad \varphi(n) > N$$

5°) Soit $\alpha$ la fonction de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\alpha(i,j) = 0$ si $i < j$ et $\alpha(i, j) = 1$ si $i \geq j$.

On pose $\beta(i, j) = \alpha(i, j) - \alpha(i, \varphi^{-1}(j))$. $i$ étant fixé, montrer qu'il existe une valeur $n(i)$ supérieure ou égale à $m_i$ que l'on déterminera, telle que: $\forall j < n(i) \quad \beta(i, j) = 0$.

T.S.V.P. ⟶

6°) On considère la suite de terme général $v_n = \frac{1}{\varphi(n)!}$

Exprimer $\sum_{n=0}^{N} (u_n - v_n)$ en fonction des valeurs de $(u_n)$ et de $\beta$.

7°) En déduire la limite de la série $(v_n)$.

## - PROBLEME II -

1°) On pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x \, dx$ où $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de $J_n$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

2°) Trouver une relation de récurrence entre $J_n$ et $J_{n-2}$; en déduire l'expression de $J_{2p}$ et $J_{2p+1}$ sous forme d'une somme.

3°) On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Etudier sa convergence. On pose $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{2k}|$ et $y_n = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{2k+1}|$. Etudier les suites $(x_n)$ et $y_n)$.

4°) On définit deux suites $(p_n)$ et $(q_n)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante:

$p_0 = q_0 = 0$ , $\forall n \geq 1$ $x_{p_n - 1} \leq y_{q_{n-1}} < x_{p_n}$ et $y_{q_n - 1} \leq x_{p_n} < y_{q_n}$

Calculer $p_1$, $q_1$, $p_2$ et $q_2$. Montrer l'existence et l'unicité de telles suites. Etudier ces deux suites.

5°)On pose $a_n = x_{p_n}$ et $b_n = y_{q_n}$. Quelles sont les limites des suites $a_n$, $b_n$, $a_n - b_n$ et $a_{n+1} - b_n$ ?

6°) On définit une application $\varphi$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante:

$\varphi(p_n + q_n) = 2 p_n$, $\varphi(p_{n+1} + q_n) = 2q_n + 1$, et pour toutes les autres valeurs j de $\mathbb{N}$ qui ne peuvent se mettre sous la forme $p_n + q_n$ ou $p_{n+1} + q_n$ quand n décrit $\mathbb{N}$ : $\varphi(j) = \varphi(j - 1) + 2$.

Calculer $\varphi([p_n + q_n, p_{n+1} + q_n - 1])$ et $\varphi([p_{n+1} + q_n, p_{n+1} + q_{n+1} - 1])$ (on appellera P l'ensemble des entiers pairs et I l'ensemble des entiers impairs). $\varphi$ est-elle surjective? injective?

7°) On considère la série de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$. Exprimer

$\sum_{i=0}^{p_{n+1} + q_n - 1} v_i$ et $\sum_{i=0}^{p_{n+1} + q_{n+1} - 1} v_i$ en fonction des suite $(a_n)$ et $(b_n)$.

En déduire la limite de la série $(v_n)$.